HYPERBOLISEN GEOMETRIAN PUOLITASOMALLI

JUKKA SELIN

Date: 9. joulukuuta 2010.

Sisältö

1. Johdanto

Lähdin tutkimaan hyperbolista geometriaa, koska aihe on kiehtonut minua. Kirjoitin jo kandidaatin tutkielman samasta aiheesta ja tällöin keskityin tutkimaan hyperbolista geometriaa aksiomaattisesta näkökulmasta. Tällä kertaa tutkielma on tehty analyysin näkökulmasta.

Tutkielmassa käsitellään hyperbolista geometriaa puolitasomallin kautta. Malli on toinen matemaatikko Henri Poincarén $(1854 - 1912)$ kehittämistä hyperbolisista malleista.$[3, s.307]$

Tutkielman päätulos on osoittaa, että pari $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ on polkumetrinen avaruus. Tämän osoittamiseksi käsittelen hyperbolista pituutta ja metriikkaa. Konstruoin lausekkeet hyperboliselle pituudelle ja metriikalle. Muita keskeisiä käsitteitä ovat Möbius-muunnokset ja Riemannin kuula. Pyrin rakentamaan tutkielman niin että asiat käsitellään oikeassa järjestyksessä ja tärkeät tulokset todistetaan.

Tutkielman esitystapa rakentuu paljolti kompleksiluvuille. Lisäksi tämän tutkielman esitietoina tarvitaan hieman geometrian ymmärrystä, analyysin perusteita, tietoa polkuintegraaleista ja topologian perustietoja.

Lähteenä olen käyttänyt ennen kaikkea James W. Andersonin kirjaa *Hyperbolic Geometry* [1].

2. Puolitasomallin peruskäsitteet

Hyperbolisen geometrian puolitasomallissa käsitellään joukkoa $\mathbb{H}$.

2.1. **Määritelmä.** Määritellään

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}. \tag{2.2}$$

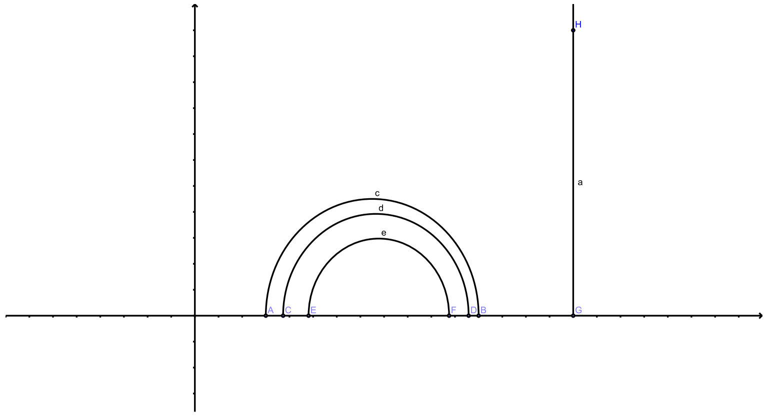
Joukko $\mathbb{H}$ on siis kompleksitason reaaliakselin yläpuolinen osa.

2.3. **Määritelmä.** Puolitasomallissa on olemassa kaksi eri tyyppistä hyperbolista suoraa:
Toinen on joukon $\mathbb{H}$ leikkaus euklidisen suoran kanssa, joka on kohtisuorassa $\mathbb{R}$-akselia vastaan. Toinen on joukon $\mathbb{H}$ leikkaus euklidisen ympyrän kanssa, jonka keskipiste on $\mathbb{R}$-akselilla.

2.4. **Lause.** *Kaikille erillisille pisteille p ja q joukossa $\mathbb{H}$, on olemassa yksikäsitteinen hyperbolinen suora l joka kulkee pisteiden p ja q kautta.*

Todistus. On kaksi tapausta. Oletetaan ensin että $Re(p) = Re(q)$. Tällöin euklidinen suora $L = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = Re(p)\}$ on kohtisuorassa reaalilukuakselia vastaan ja kulkee pisteiden p ja q kautta. Nyt kysytty hyperbolinen suora l on $\mathbb{H} \cap L$.

Toinen tapaus on että $Re(p) \neq Re(q)$. Koska nyt euklidinen suora pisteiden p ja q kautta ei ole kohtisuorassa reaaliakselia vastaan, niin konstruoidaan euklidinen ympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla ja joka kulkee pisteiden p ja q kautta.



KUVA 1. Hyperbolisia suoria

Olkoon L_{pq} euklidinen jana, joka yhdistää pisteet p ja q ja K tälle kohtisuora suora, joka puolittaa janan L_{pq}. Nyt kaikilla euklidisilla ympyröillä, jotka kulkevat pisteiden p ja q kautta on keskipiste suoralla K. Koska $Re(p) \neq Re(q)$, euklidinen suora K ei ole yhdensuuntainen reaaliakselin kanssa ja siis suora K leikkaa reaaliakselin yksikäsitteisessä pisteessä c. Olkoon A se euklidinen ympyrä, jonka keskipiste on pisteessä c säteellä $|c-p|$, jolloin A kulkee pisteen p kautta. Leikkaus $l = \mathbb{H} \cap A$ on kysytty hyperbolinen suora. $\square$

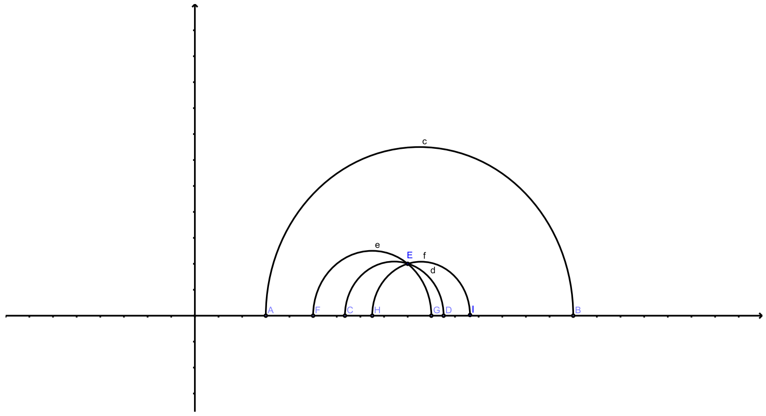
Hyperbolisten suorien yhdensuuntaisuus määräytyy samalla tavalla kuin euklidisten suorien.

2.5. **Määritelmä.** Kaksi hyperbolista suoraa ovat yhdensuuntaiset jos ne eivät leikkaa toisiaan.

2.6. **Lause.** *Olkoon l hyperbolinen suora joukossa $\mathbb{H}$ ja olkoon p piste, joka ei ole suoralla l. Tällöin on olemassa äärettömän monta erilaista hyperbolista suoraa, jotka kulkevat pisteen p kautta ja ovat yhdensuuntaisia suoran l kanssa.*

Todistus. Kaksi tapausta. Oletetaan ensin että l sisältyy euklidiseen suoraan L. Koska p ei ole suoralla L, on olemassa euklidinen suora K, joka kulkee pisteen p kautta ja on yhdensuuntainen suoralle L. Koska L on kohtisuorassa reaaliakselia vastaan myös suora K on kohtisuorassa reaaliakselia vastaan. Siis yksi hyperbolinen suora joukossa $\mathbb{H}$, joka kulkee pisteen p kautta ja on yhdensuuntainen suoran l kanssa on leikkaus $\mathbb{H} \cap K$.

Konstruoidaan toinen hyperbolinen suora pisteen p kautta, joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa. Olkoon piste x reaaliakselilla suorien K ja L välissä, ja olkoon A se euklidinen ympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla ja joka kulkee pisteiden p ja x kautta. Tiedämme että sellainen ympyrä on olemassa koska $Re(x) \neq Re(p)$ (Lauseen 2.4 todistus). Kontruktion takia A ei leikkaa suoraa L ja siis hyperbolinen



Kuva 2. Yhdensuuntaisia hyperbolisia suoria

suora $\mathbb{H} \cap A$ ei leikkaa suoraa l. Nyt $\mathbb{H} \cap A$ on toinen suora pisteen p kautta, joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa.

Koska reaaliakselilla on ylinumeroituvasti pisteitä suorien K ja L välissä, tämä konstruktio antaa rajattomasti hyperbolisia suoria pisteen p kautta, jotka ovat yhdensuuntaisia suoran l kanssa.

Toisessa tapauksessa oletetaan että l sisältyy euklidiseen ympyrään A. Olkoon D se ympyrä, jolla on sama keskipiste kuin ympyrällä A ja joka kulkee pisteen p kautta. Nyt koska A ja D eivät leikkaa ja niillä on sama keskipiste, yksi hyperbolinen suora pisteen p kautta, joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa on leikkaus $\mathbb{H} \cap D$.

Konstruoidaan toinen yhdensuuntainen hyperbolinen suora pisteen p kautta. Olkoon x mielivaltainen piste reaaliakselilla ympyröiden A ja D välissä. Olkoon E se euklidinen ympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla ja joka kulkee pisteiden x ja p kautta. Jälleen konstruktion kautta E ja A eivät leikkaa ja siis $\mathbb{H} \cap E$ on kysytty yhdensuuntainen hyperbolinen suora.

Kuten aiemmin, koska reaaliakselilla on ylinumeroituvasti pisteitä ympyröiden A ja D välissä, pisteen p kautta kulkee äärettömän monta erilaista hyperbolista suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia suoran l kanssa. $\square$

3. Riemannin pallo

Seuraavaksi esitellään idea, jonka avulla voidaan yhdistää kaksi eri tyyppistä hyperbolista suoraa. Tämä on tärkeää myös myöhemmin kun määritellään muunnokset joukossa $\mathbb{H}$. Ajatus lähtee liikkeelle siitä toteamuksesta, että euklidisen ympyrän voi saada euklidisesta suorasta lisäämällä tähän yhden pisteen.

Merkitään yksikköympyrää joukossa $\mathbb{C}$ symbolilla $\mathbb{S}^1$, tutkitaan funktiota

$$\xi : \mathbb{S}^1 \setminus \{i\} \to \mathbb{R} \tag{3.1}$$

joka määritellään seuraavasti: annetulle pisteelle $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{i\}$, olkoon K_z euklidinen suora joka kulkee pisteiden i ja z kautta ja $\xi(z) = \mathbb{R} \cap K_z$. Tämä funktio on hyvinmääritelty, koska K_z ja $\mathbb{R}$ leikkaavat yksikäsitteisessä pisteessä kun $Im(z) \neq 1$.

Tätä toimenpidettä kutsutaan stereograafiseksi projektioksi. Karteesisissa koordinaateissa reaaliakseli kompleksitasossa vastaa x-akselia ja siis $\xi(z)$ on suoran K_z leikkauspiste x-akselin kanssa. Laskemalla huomaamme, että suoralla K_z on kulmakerroin

$$m = \frac{Im(z) - 1}{Re(z)}$$

ja se leikkaa y-akselin pisteessä 1. Täten suoran K_z yhtälö on

$$y - 1 = \frac{Im(z) - 1}{Re(z)} x.$$

Erityisesti sen leikkauspiste x-akselin kanssa on

$$\xi(z) = \frac{Re(z)}{1 - Im(z)}.$$

3.2. **Lause.** *ξ on bijektio joukkojen $\mathbb{S}^1 \setminus \{i\}$ ja $\mathbb{R}$ välillä.*

Todistus. Injektiivisyys seuraa geometrisesti siitä, että pari erillisiä pisteitä joukossa $\mathbb{C}$ määrää yksikäsitteisen euklidisen suoran. Jos z ja w ovat pisteitä joukossa $\mathbb{S}^1 \setminus \{i\}$, joille $\xi(z) = \xi(w)$, tällöin suorat K_z ja K_w kulkevat molemmat saman reaaliakselin pisteen kautta. Kun suorat kulkevat myös pisteen i kautta, suorat ovat samoja ja siis $z = w$.

Surjektiivisuus seuraa siitä että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on olemassa euklidinen suora joka kulkee pisteiden x ja i kautta. Ehtona on kuitenkin, että suora leikkaa joukon $\mathbb{S}^1 \setminus \{i\}$. Laskemalla voimme huomata, että tällainen suora leikkaa aina myös joukon $\mathbb{S}^1 \setminus \{i\}$. Tarkka todistus sivuutetaan. Tämä osoittaa surjektiivisuuden, sillä jokaiselle joukon $\mathbb{R}$ pisteelle kuvautuu tällöin ainakin yksi joukon $\mathbb{S}^1 \setminus \{i\}$ piste. Siis ξ on bijektio. $\square$

Yksi mahdollinen avaruus, joka sisältää joukon $\mathbb{H}$ ja jossa kaksi eri tyyppistä hyperbolista suoraa yhdistyvät, on avaruus joka saadaan joukosta $\mathbb{C}$ lisäämällä yksi piste. Tämä on kompleksianalyysin klassinen konstruktio Riemannin pallolle $\overline{\mathbb{C}}$.

3.3. **Määritelmä.** Riemannin kuula määritellään kompleksitason unionina pisteen kanssa, joka ei kuulu kompleksitasoon. Tätä pistettä merkitään symbolilla ∞.

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \tag{3.4}$$

3.5. **Määritelmä.** Ympyrä tasossa $\overline{\mathbb{C}}$ on joko euklidinen ympyrä joukossa $\mathbb{C}$ tai $l \cup \{\infty\}$ missä, l on euklidinen suora joukossa $\mathbb{C}$.

Joukon $\overline{\mathbb{C}}$ ympyrät voidaan esittää myös yhtälöiden ratkaisujen joukkoina. Jokainen euklidinen ympyrä joukossa $\mathbb{C}$ voidaan esittää yhtälön ratkaisuina, joka on muotoa

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \tag{3.6}$$

missä $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{C}$. Ja jokainen euklidinen suora joukossa $\mathbb{C}$ voidaan esittää yhtälön ratkaisuina, joka on muotoa

$$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \tag{3.7}$$

missä $\gamma \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{C}$.

Yhdistämällä nämä huomaamme, että jokainen joukon $\overline{\mathbb{C}}$ ympyrä voidaan esittää yhtälön ratkaisuina joukossa $\overline{\mathbb{C}}$, joka on muotoa

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \tag{3.8}$$

missä $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{C}$.

Tähän liittyen on käsiteltävä yksi hienous. Nimittäin se onko ∞, vai ei, ratkaisu ympyrän yhtälöön joukossa $\overline{\mathbb{C}}$. Kun yhtälö on muotoa

$$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0,$$

voimme pitää pistettä ∞ ratkaisuna jatkuvuuden nojalla. Eli tällöin on olemassa jono $\{z_n\}$ pisteitä joukossa $\mathbb{C}$, joka toteuttaa tämän yhtälön ja suppenee pisteeseen ∞ joukossa $\overline{\mathbb{C}}$.

Erityisesti olkoon w_0 ja w_1 kaksi erillistä ratkaisua, siten että jokainen lineaarikombinaatio muotoa $w_0 + t(w_1 - w_0), t \in \mathbb{R}$ on myös ratkaisu. Tutkitaan jonoa

$$\{z_n = w_0 + n(w_1 - w_0), n \in \mathbb{N}\}.$$

Tämä jono suppenee pisteeseen ∞ joukossa $\overline{\mathbb{C}}$, ja jokaiselle n pätee

$$\beta z_n + \overline{\beta}\overline{z_n} + \gamma = 0.$$

Kuitenkin kun yhtälö on muotoa

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0,$$

emme voi pitää pistettä ∞ ratkaisuna jatkuvuuden nojalla. Tämä johtuu siitä, että voimme kirjoittaa

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = \alpha \left| z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha} \right|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha}.$$

Erityisesti jos $\{z_n\}$ on jokin jono pisteitä joka suppenee pisteeseen ∞ joukossa $\overline{C}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha z_n \overline{z_n} + \beta z_n + \overline{\beta}\overline{z_n} + \gamma) = \infty.$$

Täten z_n ei voi sisältyä ympyrään

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0\},$$

kun n on tarpeeksi suuri, ja siis piste ∞ ei sisälly ympyrään A.

3.9. **Määritelmä.** Joukko $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ on avoin jos jokaiselle $x \in X$ on olemassa $\varepsilon > 0$ siten että $U_\varepsilon(x) \subset X$, missä $U_\varepsilon(x) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$.

3.10. **Määritelmä.** Joukko $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ on suljettu, jos sen komplementti $\overline{\mathbb{C}} \setminus X$ on avoin joukossa $\overline{\mathbb{C}}$.

3.11. **Määritelmä.** Funktio $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ on jatkuva pisteessä $z \in \overline{\mathbb{C}}$ jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten että jos $w \in U_\delta(z)$ niin $f(w) \in U_\varepsilon(f(z))$. Funktio $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ on jatkuva jos se on jatkuva jokaisessa joukon $\overline{\mathbb{C}}$ pisteessä.

Pienenä huomiona huomataan, että funktioiden, jotka ovat joukolta $\mathbb{R}$ joukolle $\mathbb{R}$, ja funktioiden, jotka ovat joukolta $\overline{\mathbb{C}}$ joukolle $\overline{\mathbb{C}}$, jatkuvuus käyttäytyy eri tavalla, johtuen pisteestä ∞. Tämä nähdään esimerkin avulla.

3.12. **Esimerkki.** Funktio $J : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, jolle $J(z) = \frac{1}{z}$, kun $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $J(0) = \infty$ ja $J(\infty) = 0$, on jatkuva joukossa $\overline{\mathbb{C}}$.

Seuraavaksi määritellään homeomorfismi.

3.13. **Määritelmä.** Funktio $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ on homeomorfismi, jos f on bijektio ja sekä f, että f^{-1} ovat jatkuvia.

4. Möbius-muunnokset

Tarkoitus on saada aikaan muunnos joukkoon $\mathbb{H}$, joka kuvaa hyperboliset suorat hyperbolisiksi suoriksi. Koska jokainen joukon $\mathbb{H}$ hyperbolinen suora sisältyy johonkin ympyrään joukossa $\overline{\mathbb{C}}$, aloitetaan määrittelemällä joukko homeomorfismeja, jotka kuvaavat ympyrät ympyröiksi joukossa $\overline{\mathbb{C}}$.

Merkitään kaikkien joukon $\overline{\mathbb{C}}$ homeomorfismien joukkoa $Homeo(\overline{\mathbb{C}})$ ja niiden homeomorfismien joukkoa, jotka kuvaavat ympyrät ympyröiksi joukossa $\overline{\mathbb{C}}$, $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$. $Homeo(\overline{\mathbb{C}})$ on myös ryhmä, kuvausten yhdistämisen ja vakiolla kertomisen suhteen.

Aloitetaan tutkimalla joukon $\overline{\mathbb{C}}$ homeomorfismeja, joita on helppo käsitellä, nimittäin polynomeista muodostuvia. Koska tutkimme homeomorfismeja, rajoitumme tutkimaan ensimmäisen asteen polynomifunktioita.

4.1. **Lause.** *Olkoon joukon $Homeo(\overline{\mathbb{C}})$ alkio f muotoa*

$$f(z) = az + b, \quad kun \quad z \in \mathbb{C} \tag{4.2}$$

ja $f(\infty) = \infty$, missä $a, b \in \mathbb{C}$ ja $a \neq 0$. Tällöin $f \in Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.

Todistus. Muistetaan että jokainen ympyrä A joukossa $\overline{\mathbb{C}}$ on ratkaisujen joukko yhtälöön joka on muotoa

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0,$$

missä $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, ja $\alpha \neq 0$ jos ja vain jos A on ympyrä joukossa $\mathbb{C}$.

Aloitetaan tutkimalla tapausta jossa A on euklidinen suora joukossa $\mathbb{C}$. Tällöin

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0\},$$

missä $\gamma \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{C}$. Haluamme näyttää, että jos z toteuttaa yhtälön, niin myös $w = az + b$ toteuttaa saman. Koska $w = az + b$ niin $z = \frac{1}{a}(w - b)$. Nyt pätee

$$\begin{aligned}\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma &= \beta \frac{1}{a}(w-b) + \overline{\beta}\overline{\frac{1}{a}(w-b)} + \gamma \\ &= \frac{\beta}{a}w + \overline{\frac{\beta}{a}}\overline{w} - \frac{\beta}{a}b - \overline{\frac{\beta}{a}b} + \gamma = 0.\end{aligned}$$

Koska $\frac{\beta}{a}b + \overline{\frac{\beta}{a}b} = 2Re(\frac{\beta}{a}b)$ on reaalinen huomaamme, että myös w toteuttaa euklidisen suoran yhtälön. Täten f kuvaa euklidiset suorat joukossa $\mathbb{C}$ euklidiksi suoriksi. Vastaavalla tavalla voimme osoittaa, että f kuvaa myös euklidiset ympyrät euklidisiksi ympyröiksi. Oletetaan, että z toteuttaa yhtälön

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0,$$

missä $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{C}$. Ja näytetään, että $w = az + b$ toteuttaa saman. Nyt pätee $z = \frac{1}{a}(w - b)$ ja

$$\begin{aligned}\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma &= \frac{\alpha}{a}(w-b)\overline{\frac{\alpha}{a}(w-b)} + \frac{\beta}{a}(w-b) + \overline{\frac{\beta}{a}(w-b)} + \gamma \\ &= (\frac{\alpha}{a}w - \frac{\alpha}{a}b)(\overline{\frac{\alpha}{a}w} - \overline{\frac{\alpha}{a}b}) + \frac{\beta}{a}w - \frac{\beta}{a}b + \overline{\frac{\beta}{a}w} - \overline{\frac{\beta}{a}b} + \gamma.\end{aligned}$$

Tämä saadaan muotoon

$$\frac{\alpha}{a}\frac{\overline{\alpha}}{a}w\overline{w} + (\frac{\beta}{a} - \frac{\alpha}{a}\frac{\overline{\alpha}}{a}\overline{b})w + (\overline{\frac{\beta}{a}} - \frac{\alpha}{a}\frac{\overline{\alpha}}{a}b)\overline{w} + (\frac{\alpha}{a}\frac{\overline{\alpha}}{a}b\overline{b} - \frac{\beta}{a}b - \overline{\frac{\beta}{a}b} + \gamma) = 0$$

Tästä huomataan että w toteuttaa ympyrän yhtälön, aiemman huomion $\frac{\beta}{a}b + \overline{\frac{\beta}{a}b} = 2Re(\frac{\beta}{a}b)$, avulla.

Nyt siis f kuvaa ympyrät ympyröiksi joukossa $\overline{\mathbb{C}}$. □

On myös toisen tyyppinen homeomorfismi, joka kuvaa ympyrät ympyröiksi.

4.3. **Lause.** *Olkoon joukon $Homeo(\overline{\mathbb{C}})$ alkio f muotoa*

$$J(z) = \frac{1}{z} \quad kun \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{4.4}$$

ja $J(0) = \infty$, $J(\infty) = 0$. Tällöin $f \in Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.

Todistus. Nyt $w = \frac{1}{z}$, siis $z = \frac{1}{w}$. Tällöin sijoittamalla ympyrän yhtälöön

$$\alpha \frac{1}{w}\overline{\frac{1}{w}} + \beta\frac{1}{w} + \overline{\beta\frac{1}{w}} + \gamma = 0.$$

Kertomalla yhtälö kertoimella $w\overline{w}$ huomaamme että w toteuttaa yhtälön

$$\alpha + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma w\overline{w} = 0.$$

Koska $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ sekä w ja $\overline{w}$ ovat konjugaatteja tämä on jälleen ympyrän yhtälö. $\square$

Nyt meillä on kaksi eri tyyppistä homeomorfismia, jotka kuvaavat ympyrät ympyröiksi joukossa $\overline{\mathbb{C}}$. Kummatkin homeomorfismit ovat muotoa $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Tämä johtaa meidät seuraavaan määritelmään.

4.5. **Määritelmä.** Möbius-muunnos on funktio $m : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, joka on muotoa

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{4.6}$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$. Merkitään kaikkien Möbius-muunnosten joukkoa $M\ddot{o}b^+$.

4.7. **Lause.** *Olkoon $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius-muunnos, missä $a, b, c, d \in C$ ja $ad - bc \neq 0$. Nyt pätee:*
Jos $c = 0$, niin $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$.
Jos $c \neq 0$, niin $m(z) = f(J(g(z)))$, missä $g(z) = c^2z + cd$,
$f(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$ ja $J(z) = \frac{1}{z}$.

Todistus. Todistus on suora laskutoimitus. Jos $c = 0$, niin asia on selvä. Jos $c \neq 0$, niin

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)}{(cz+d)}\frac{c}{c} = \frac{acz+bc}{c^2z+cd}.$$

Koska $ad - bc \neq 0$, niin

$$\frac{acz+bc}{c^2z+cd} = \frac{acz+ad-(ad-bc)}{c^2z+cd} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2z+cd} = f(J(g(z))),$$

missä $g(z) = c^2z + cd$, $f(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$ ja $J(z) = \frac{1}{z}$. $\square$

Tällä lauseella on monta suoraa seurausta.

4.8. **Korollaari.** *Jokainen Möbius-muunnos on homeomorfismi, koska jokainen Möbius-muunnos voidaan esittää homeomorfismien yhdisteenä. Tästä seuraa että*

$$M\ddot{o}b^+ \subset Homeo(\overline{\mathbb{C}}).$$

Toiseksi, jokainen Möbius-muunnos kuvaa ympyrät ympyröiksi joukossa $\overline{\mathbb{C}}$, koska Möbius-muunnokset on konstruoitu funktioista, jotka kuvaavat ympyrät ympyröiksi.

Kun yhdistämme tämän edelliseen tulokseen, saamme lauseen.

4.9. **Lause.**

$$M\ddot{o}b^+ \subset Homeo^C(\overline{\mathbb{C}}).$$

On olemassa laajennus joukkoon $Möb^+$, joka myös sisältyy joukkoon $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$. Jotta voisimme laajentaa joukon $Möb^+$ suuremmaksi joukoksi, tutkimme yksinkertaisinta homeomorfismia joukossa $\overline{\mathbb{C}}$, joka ei kuulu joukkoon $Möb^+$, nimittäin kompleksikonjugaattia. Olkoon

$$C(z) = \overline{z} \quad \text{kun} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{ja} \quad C(\infty) = \infty. \tag{4.10}$$

4.11. **Lause.** *Funktio $C : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, joka määritellään*

$$C(z) = \overline{z} \quad \text{kun} \quad z \in \mathbb{C}, \quad C(\infty) = \infty,$$

on joukon $Homeo(\overline{\mathbb{C}})$ alkio.

Todistus. Huomataan että C on itsensä käänteisfunktio, eli $C^{-1}(z) = C(z)$, ja täten C on bijektio. Meidän täytyy vain näyttää, että C on jatkuva. Funktion C jatkuvuus seuraa siitä, että jokaisella $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ja $\varepsilon > 0$, pätee $C(U_\varepsilon(z)) = U_\varepsilon(C(z))$. □

4.12. **Määritelmä.** Funktio C ja joukko $Möb^+$ generoivat yleisen Möbius-joukon $Möb$. Jokainen joukon $Möb$ alkio p voidaan kirjoittaa muodossa

$$p = C \circ m_k \cdots C \circ m_1, \tag{4.13}$$

jollekin $k \geq 1$, missä jokainen m_k on joukon Möb$^+$ alkio ja $C(z) = \overline{z}$.

4.14. **Lause.** *$Möb \subset Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.*

Todistus. Olkoon $p \in Möb$. Tällöin $p = C \circ m_k \cdots C \circ m_1$, jollekin $k \geq 1$, missä jokainen m_k on joukon Möb$^+$ alkio. Koska $Möb^+ \subset Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$, $m_k \in Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$ kaikilla, k. Riittää siis osoittaa, että funktio $C : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sisältyy joukkoon $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$, ts. että C kuvaa ympyrät ympyröiksi joukossa $\overline{\mathbb{C}}$. Oletetaan, että $z \in \mathbb{C}$ toteuttaa yhtälön

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0,$$

missä $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{C}$. Olkoon $w = \overline{z}$ tällöin $z = \overline{w}$. Nyt ylempi yhtälö saadaan muotoon:

$$\alpha\overline{w}w + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma = 0.$$

Huomataan, että yhtälö on edelleen ympyrän yhtälö, sillä $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{C}$. Siis $C \in Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.

Nyt p on yhdiste funktioista, jotka kuuluvat joukkoon $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$. Siis $p \in Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$. □

Kaikki joukon Möb alkiot ovat homeomorfismeja, jotka kuvaavat ympyrät ympyröiksi joukossa $\overline{\mathbb{C}}$. Itseasiassa nämä ominaisuudet määrittelevät joukon Möb.

4.15. **Lause.** *$Möb = Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.*

Todistus. Todistus sivuutetaan. $[1, s. \mid 44 - 46]$ □

4.16. **Lause.** *Jokainen joukon* $\text{Möb}(\mathbb{H})$ *alkio on muotoa*

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{4.17}$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *ja* $ad - bc = 1$*, tai muotoa*

$$n(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}, \tag{4.18}$$

missä a, b, c, d *ovat puhtaasti imaginaarisia ja* $ad - bc = 1$.

Todistus. Todistus sivuutetaan. $[1, s. \mid 51 - 52]$ □

5. Kaaren pituus tasossa $\mathbb{C}$

5.1. **Määritelmä.** Polku tasossa $\mathbb{R}^2$ on differentioituva funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, jolle $f(t) = (x(t), y(t))$ missä $x(t)$ ja $y(t)$ ovat muuttujan t suhteen differentioituvia ja $[a, b]$ jokin reaalilukuväli.

5.2. **Määritelmä.** Euklidinen polun f pituus saadaan integraalista

$$\text{pituus}(f) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \tag{5.3}$$

Seuraavaksi muutetaan notaatiota ja siirrytään tarkastelemaan polun pituutta tasossa $\mathbb{C}$ tason $\mathbb{R}^2$ sijaan. Nyt $f(t) = x(t) + y(t)i$, $f'(t) = x'(t) + y'(t)i$ ja $|f'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Tällöin polun pituudelle pätee

$$\text{pituus}(f) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_a^b |f'(t)|dt \tag{5.4}$$

Voimme siis kirjoittaa kaaren pituuden pituuselementin joukossa $\mathbb{C}$

$$|dz| = |f'(t)|dt \tag{5.5}$$

Nyt otamme käyttöön uuden merkinnän:

$$\int_a^b |f'(t)|dt = \int_f |dz|. \tag{5.6}$$

5.7. **Lause.** *Voimme kirjoittaa minkä tahansa polkuintegraalin tällä notaatiolla. Olkoon* ρ *jatkuva funktio,* $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$*. Funktion* ρ *polkuintegraali pitkin polkua* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *saadaan integraalista*

$$\int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt. \tag{5.8}$$

Voimme tulkita tämän polkuintegraalin uutena kaaren pituuden elementtinä $\rho(z)|dz|$, joka saadaan kun skaalataan euklidista kaaren pituuden elementtiä $|dz|$ joka pisteessä. Funktio ρ määrää skaalauksen määrän. Tästä saamme seuraavan määritelmän.

5.9. **Määritelmä.** Differentioituvalle polulle $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ määritellään polun pituus, käyttäen kaaren pituuden elementtiä $\rho(z)|dz|$, polkuintegraalina

$$\text{pituus}_\rho(f) = \int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt. \tag{5.10}$$

5.11. **Määritelmä.** Polku $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ on *paloittain differentioituva* jos f on jatkuva ja jos on olemassa välin $[a, b]$ ositus osaväleiksi $[a = a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, a_{n+1} = b]$ siten että f on differentioituva, jokaisella osavälillä $[a_k, a_{k+1}]$.

5.12. **Määritelmä.** Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ paloittain differentioituva polku ja $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ differentioituva, sekä $h(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [\alpha, \beta]$ tai $h(t) \leq 0$ kaikilla $t \in [\alpha, \beta]$. Oletaan lisäksi että pätee

$$\text{pituus}_\rho(f) = \text{pituus}_\rho(f \circ h). \tag{5.13}$$

Tällöin kutsumme funktiota $f \circ h$ funktion f *uudelleen parametrisaatioksi.*

Tässä yksi tulos, joka on hyödyllinen myöhemmin.

5.14. **Lause.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ paloittain differentioituva polku, olkoon $[\alpha, \beta]$ toinen reaalilukuväli ja olkoon $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ surjektiivinen differentioituva funktio. Olkoon $\rho(z)|dz|$ kaaren pituuden elementti joukossa $\mathbb{C}$. Tällöin*

$$\text{pituus}_\rho(f \circ h) \geq \text{pituus}_\rho(f), \tag{5.15}$$

missä on yhtäsuuruus jos ja vain jos $h \circ f$ on funktion f uudelleen parametrisaatio.

6. Kaaren pituus tasossa $\mathbb{H}$

Tavoitteena on kehittää keino mitata hyperbolista pituutta ja etäisyyttä joukossa $\mathbb{H}$. Jotta voisimme mitata hyperbolista pituutta, on löydettävä sopiva hyperbolinen elementti kaaren pituudelle. Koska haluamme mitata hyperbolista pituutta ja koska meillä on käytössä ryhmä siististi käyttäytyviä muunnoksia joukossa $\mathbb{H}$, nimittäin Möbius-muunnokset, on tarkoitus tutkia niitä kaaren pituuden elementtejä joukossa $\mathbb{H}$, jotka säilyvät muuttumattomina Möbius-muunnoksissa.

Olkoon $\rho(z)|dz|$ kaaren pituuselementti joukossa $\mathbb{H}$. Tällöin paloittain differentioituvan polun $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ pituus saadaan integraalista

$$\text{pituus}_\rho(f) = \int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt.$$

Se että pituus säilyy muuttumattomana $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ muunnoksissa, tarkoittaa, että jokaiselle paloittain differentioituvalle polulle $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ ja jokaiselle joukon $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ alkiolle γ pätee

$$\text{pituus}_\rho(f) = \text{pituus}_\rho(\gamma \circ f). \tag{6.1}$$

Tutkitaan mitä ehtoja tämä asettaa funktiolle ρ. Olkoon $\gamma \in M\ddot{o}b^+(\mathbb{H})$. Nyt pätee

$$\text{pituus}_\rho(f) = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt$$

ja

$$\text{pituus}_\rho(\gamma \circ f) = \int_a^b \rho(\gamma \circ f(t))|(\gamma \circ f)'(t)|dt.$$

Siis nyt pätee

$$\int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt = \int_a^b \rho(\gamma \circ f(t))|(\gamma \circ f)'(t)|dt,$$

jokaiselle paloittain differentioituvalle polulle $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ ja jokaiselle joukon $M\ddot{o}b^+(\mathbb{H})$ alkiolle γ.

Käytetään derivoinnin ketjusääntöä ja saadaan $(\gamma \circ f)'(t) = \gamma'(f(t))f'(t)$ ja saadaan pituuden integraaliksi

$$\int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt = \int_a^b \rho(\gamma \circ f(t))|\gamma'(f(t))||f'(t)|dt. \tag{6.2}$$

6.3. *Huomautus.* Möbius-muunnosten differentioituvuutta voidaan käsitellä kahdella tapaa. Ensimmäinen tapa on kompleksianalyysin keino. Tällöin pidetään Möbius-muunnosta m funktiona joukolta $\overline{\mathbb{C}}$ joukolle $\overline{\mathbb{C}}$ ja määrittelemme sen derivaatan $m'(z)$ tutulla määritelmällä

$$m'(z) = \lim_{w \to z} \frac{m(w) - m(z)}{w - z}. \tag{6.4}$$

Tällä määritelmällä kaikki yleiset derivointisäännöt pätevät ja

$$m'(z) = \frac{1}{(cd + d)^2}. \tag{6.5}$$

Tätä määritelmää käytetään yleisesti.

Ensimmäisessä tavassa on kuitenkin yksi heikkous. Funktion, joka on joukon $M\ddot{o}b$ alkio mutta ei joukon $M\ddot{o}b^+$ derivaattaa ei ole määritelty. Erityisesti funktion $C(z) = \overline{z}$ derivaattaa ei ole olemassa.

On olemassa toinen tapa määritellä joukon $M\ddot{o}b$ alkion derivaatta. Tämä tapa hyödyntää monen muuttujan differentiaali- ja integraalilaskentaa. Tällöin unohdamme, että joukon $M\ddot{o}b$ alkio m on kompleksitason funktio. Sen sijaan tarkastelemme sitä tasossa $\mathbb{R}^2$. Nyt derivaatta ei ole enää yksi funktio, vaan 2 x 2 matriisi osittaisderivaattoja. Kirjoitamme siis funktion m muodossa $m(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, missä f ja g ovat reealiarvoisia funktioita. Nyt funktion m derivaatta on

$$Dm = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} & \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta g}{\delta x} & \frac{\delta g}{\delta y} \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Palataan tutkimaan funktiolle ρ asetettavia ehtoja. Nyt pätee siis

$$\int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt = \int_a^b \rho(\gamma \circ f(t))|\gamma'(f(t))||f'(t)|dt.$$

jokaiselle paloittain määritellylle polulle $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ ja jokaiselle $\gamma \in M\ddot{o}b^+(\mathbb{H})$. Tämä voidaan kirjoittaa myös

$$\int_a^b (\rho(f(t)) - \rho((\gamma \circ f)(t))|\gamma'(f(t))|)|f'(t)|dt = 0$$

jokaiselle paloittain määritellylle polulle $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ ja jokaiselle $\gamma \in M\ddot{o}b^+(\mathbb{H})$.

Asetetaan joukon $M\ddot{o}b^+(\mathbb{H})$ alkiolle γ

$$\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)|, \tag{6.7}$$

jolloin funktion ρ ehdosta tulee funktion $\mu_\gamma(z)$ ehto:

$$\int_f \mu_\gamma(z)|dz| = \int_a^b \mu_\gamma(f(t))|f'(t)|dt = 0, \tag{6.8}$$

jokaiselle paloittain määritellylle polulle $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ ja jokaiselle $\gamma \in M\ddot{o}b^+(\mathbb{H})$. Koska $\rho(z)$ on jatkuva ja differentioituva, myös $\mu_\gamma(z)$ jatkuva jokaisella $\gamma \in M\ddot{o}b^+(\mathbb{H})$.

6.9. **Lemma.** *Olkoon D avoin joukon $\mathbb{C}$ osajoukko. Olkoon $\mu : D \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja oletetaan, että $\int_f \mu(z)|dz| = 0$ jokaiselle paloittain differentioituvalle polulle $f : [a, b] \to D$. Tällöin $\mu \equiv 0$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus. Oletetaan että on olemassa piste $z \in D$, jolle $\mu(z) \neq 0$. Riittää tarkastella tapausta $\mu(z) > 0$ ($\mu(z) < 0$ on symmetrinen).

Se että μ on jatkuva tarkoittaa että jokaisella $\varepsilon > 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten että jos $U_\delta(z) \subset D$ ja $w \in U_\delta(z)$ niin $\mu(w) \in U_\varepsilon(\mu(z))$, missä

$$U_\delta(z) = \{u \in \mathbb{C} : |u - z| < \delta\} \quad ja \quad U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{R} : |s - t| < \varepsilon\}.$$

Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{3}|\mu(z)|$. Näemme että on olemassa $\delta > 0$ siten että jos $w \in U_\delta(z)$ niin $\mu(w) \in U_\varepsilon(\mu(z))$. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä ja tietoa että $\mu(z) > 0$ saamme $\mu(w) > 0$ kaikille $w \in U_\delta(z)$.

Valitaan paloittain differentioituva polku, joka ei ole vakiofunktio, $f : [0, 1] \to U_\delta(z)$,

$$f(t) = z + \frac{1}{3}\delta t.$$

Huomataan, että $\mu(f(t)) > 0$ kaikille $t \in [0, 1]$. Koska $f(t) \in U_\delta(z)$ kaikille $t \in [0, 1]$. Erityisesti $\int_f \mu(z)|dz| > 0$, mistä saadaan ristiriita. $\square$

Muistetaan, että oletamme että pituus ei muutu joukon Möb$^+(\mathbb{H})$ muunnoksissa, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että $\int_f \mu_\gamma(z)|dz| = 0$, jokaiselle paloittain differentioituvalle polulle $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ ja jokaiselle $\gamma \in Möb^+(\mathbb{H})$. Käyttämällä edellistä lemmaa funktioon $\mu_\gamma(z)$ tulemme tulokseen

$$\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)| = 0 \tag{6.10}$$

jokaiselle $z \in \mathbb{H}$ ja jokaiselle $\gamma \in Möb^+(\mathbb{H})$.

Jotta voisimme yksinkertaistaa analyysiä, tutkimme kuinka μ_γ käyttäytyy joukon Möb$^+(\mathbb{H})$ muunnoksissa. Olkoon γ ja φ kaksi alkiota joukosta $Möb^+(\mathbb{H})$. Laskemalla huomaamme että

$$\begin{aligned}
\mu_{\gamma\circ\varphi} &= \rho(z) - \rho(\gamma\circ\varphi)(z))|(\gamma\circ\varphi)'(z)| \\
&= \rho(z) - \rho(\gamma\circ\varphi)(z))|(\gamma'(\varphi(z))||\varphi'(z)| \\
&= \rho(z) - \rho(\varphi(z))|\varphi'(z)| + \rho(\varphi(z))|\varphi'(z)| \\
&- \rho((\gamma\circ\varphi)(z))|\gamma'(\varphi(z))||\varphi'(z)| \\
&= \mu_\varphi(z) + \mu_\gamma(\varphi(z))||\varphi'(z)|.
\end{aligned}$$

Erityisesti, jos $\mu_\gamma \equiv 0$ jokaiselle γ joka kuuluu joukon Möb$^+(\mathbb{H})$ generoivaan joukkoon, niin $\mu_\gamma \equiv 0$ myös jokaiselle joukon $Möb^+(\mathbb{H})$ alkiolle. Joukon $Möb^+(\mathbb{H})$ generoiva joukko koostuu muunnoksista $m(z) = a + b, a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ ja $J(z) = \frac{1}{z}$. Riittää että tutkimme vaatimuksia, jotka asetetaan funktiolle μ_γ ja täten funktiolle ρ, tämän generoivan joukon alkioille. Tutkitaan ensin funktiota $\gamma(z) = z + b, b \in \mathbb{R}$. Koska $\gamma'(z) = 1$ kaikille $z \in \mathbb{H}$, funktiolle ρ asetettava ehto on

$$0 \equiv \mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)| = \rho(z) - \rho(z+b),$$

kaikille $z \in \mathbb{H}$ ja $b \in \mathbb{R}$. Siis

$$\rho(z) = \rho(z+b),$$

jokaiselle $z \in \mathbb{H}$ ja $b \in \mathbb{R}$. Erityisesti $\rho(z)$ riippuu vain alkion $z = x + yi$ imaginaarisesta osasta $y = Im(z)$. Jos siis alkioilla $z_1 = x_1 + iy$ ja $z_2 = x_2 + iy$ on sama imaginaarinen osa, voidaan kirjoittaa $z_2 = z_1 + (x_2 - x_1)$. Koska $x_2 - x_1$ on reaalinen, pätee $\rho(z_2) = \rho(z_1)$.

Täten voimme tutkia funktiota ρ reaaliarvoisena yhden muuttujan $y = Im(z)$ funktiona. Erityisesti olkoon reaaliarvoinen funktio $r : (0,\infty) \to (0,\infty)$, jolle $r(y) = \rho(iy)$ ja siis $\rho(z) = r(Im(z))$, jokaiselle $z \in \mathbb{H}$.

Tutkitaan seuraavaksi generaattoria $\gamma(z) = az$, kaikille $a > 0$. Koska $\gamma'(z) = a$ kaikille $z \in \mathbb{H}$, funktiolle $\rho(z)$ asetettava ehto on

$$0 \equiv \mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)| = \rho(z) - a\rho(az),$$

jokaiselle $z \in \mathbb{H}$ ja $a > 0$. Siis

$$\rho(z) = a\rho(az),$$

jokaiselle $z \in \mathbb{H}$ ja $a > 0$. Erityisesti saamme

$$r(y) = ar(ay),$$

jokaiselle $y > 0$ ja $a > 0$. Vaihtamalla rooleja näemme, että $r(a) = yr(ay)$. Jakamalla arvolla y saamme

$$r(ay) = \frac{1}{y} r(a).$$

Asettamalla $a = 1$, saamme

$$r(y) = \frac{1}{y} r(1),$$

ja siis funktio r määräytyy täysin sen arvosta pisteessä 1.

Kun muistamme funktion r määritelmän, saamme, että pituuden säilyminen joukon $Möb^+(\mathbb{H})$ muunnoksissa asettaa funktiolle $\rho(z)$ muodon

$$\rho(z) = r(Im(z)) = \frac{c}{Im(z)},$$

missä c on mielivaltainen positiivinen vakio.

6.11. **Lause.** *Jokaiselle positiiviselle vakiolle c, joukon $\mathbb{H}$ kaaren pituuden elementti*

$$\frac{c}{Im(z)} |dz| \tag{6.12}$$

säilyy muuttumattomana joukon Möb$(\mathbb{H})$ muunnoksissa.

Mukavuuden vuoksi vakiolle c annetaan arvo 1. Tästä pääsemme määritelmään.

6.13. **Määritelmä.** Paloittain differentioituvalle polulle $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ määritellään hyperbolinen pituus

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{Im(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{Im(f(t))} |f'(t)| dt. \tag{6.14}$$

Hyperbolisen pituuden konstruktion ehtona oli, että pituus säilyy joukon $Möb(\mathbb{H})$ muunnoksissa. Tästä seuraa seuraava lause.

6.15. **Lause.** *Kaikille paloittain differentioituville poluille $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ ja kaikille $\gamma \in$ Möb$(\mathbb{H})$ pätee että*

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f). \tag{6.16}$$

On olemassa polkuja, joiden hyperbolinen pituus on helppo laskea.

6.17. **Esimerkki.** Olkoon $0 < a < b$ ja olkoon polku $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ määritelty $f(t) = it$. Kuva $f([a, b])$ on positiivisen imaginaariakselin osa, joka on pisteiden ai ja bi välissä. Koska $Im(f(t)) = t$ ja $|f'(t)| = 1$, näemme että

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{Im(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{t} dt = ln \left[\frac{b}{a} \right].$$

6.18. **Lause.** *Olkoon* $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ *paloittain differentioituva polku. Tällöin polun hyperbolinen pituus* $\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f)$ *on äärellinen.*

Todistus. Todistus pohjautuu tietoon, että on olemassa vakio $B > 0$, siten että välin $[a,b]$ kuva $f([a,b])$ sisältyy joukon $\mathbb{H}$ osajoukkoon

$$K_B = \{z \in \mathbb{H} : Im(z) \geq B\}.$$

Tämä seuraa siitä, että väli $[a,b]$ on kompakti ja täten myös kuva $f([a,b])$ on kompakti.

Koska $f([a,b])$ sisältyy joukkoon K_B, voimme arvioida integraalia, joka antaa polun f hyperbolisen pituuden. Huomaamme ensin, että paloittain differentioituvan määritelmästä seuraa, että on olemassa välin $[a,b]$ ositus P, joka jakaa välin pienemmiksi väleiksi

$$P = \{[a = a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_n, a_{n+1} = b]\},$$

siten että f on differentioituva jokaisella välillä $[a_k, a_{k+1}]$. Erityisesti derivaatta f' on jatkuva jokaisella osituksen välillä. Ääriarvolauseen nojalla on olemassa, jatkuvalle funktiolle, suljetulla välillä, jokaiselle k, luku A_k siten että

$$|f'(t)| \leq A_k \quad \text{kaikille} \quad t \in [a_k, a_{k+1}].$$

Olkoon A maksimi luvuista $A_0, \ldots, A_n$. Tällöin pätee

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) = \int_a^b \frac{1}{Im(f(t))}|f'(t)|dt \leq \int_a^b \frac{1}{B}Adt = \frac{A}{B}(b-a),$$

joka on äärellinen. □

7. Metriikka

Tiedämme nyt kuinka laskea hyperbolista pituutta, pitkin paloittain differentioituvaa polkua joukossa $\mathbb{H}$. Tämä tehdään integroimalla hyperbolista kaaren pituuden elementtiä $\frac{1}{Im(z)}|dz|$, pitkin polkua. Seuraavaksi pyrimme kohti hyperbolista etäisyyttä ja metriikkaa.

Aloitamme käsittelemällä metriikkaa. Palautetaan mieleen metriikan määritelmä.

7.1. **Määritelmä.** Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$ on metriikka joukossa X, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$:

(1) $d(x,y) \geq 0$ ja $d(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.
(2) $d(x,y) = d(y,x)$
(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,

Lukua $d(x,y)$ sanotaan pisteen x *etäisyydeksi* (tarkemmin d-etäisyydeksi) pisteestä y.

7.2. **Määritelmä.** Jos d on metriikka joukossa X, kutsumme paria (X,d) *metriseksi avaruudeksi.*

7.3. **Esimerkki.** [2, s.21] Euklidinen metriikka avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritellään

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}. \tag{7.4}$$

Erityisesti kun $n = 2$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \tag{7.5}$$

7.6. **Esimerkki.** Yksi esimerkki on joukkojen $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ tavallinen metriikka. Joukossa $\mathbb{C}$ tämä metriikka määritellään

$$n : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad \text{missä} \quad n(z,w) = |z - w|. \tag{7.7}$$

7.8. **Esimerkki.** Monimutkaisempi tapaus on Riemannin pallon $\overline{\mathbb{C}}$ metriikka $s : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, missä

$$s(z,w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}, \tag{7.9}$$

kaikille $z, w \in \mathbb{C}$ ja

$$s(z,\infty) = s(\infty,z) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \tag{7.10}$$

kaikille $z \in \mathbb{C}$.

On vielä yksi esimerkki metrisestä avaruudesta, joka on tärkeä hyperbolisen etäisyyden kannalta. Olkoon X joukko, jossa tiedämme miten mitata polkujen pituuksia. Erityisesti jokaiselle parille pisteitä x, y joukossa X, olkoon $\Gamma[x,y]$ epätyhjä kokoelma polkuja $f : [a,b] \to X$, joille pätee $f(a) = x$ ja $f(b) = y$ ja oletetaan että jokaiselle polulle $f \in \Gamma[x,y]$ on olemassa ei-negatiivinen reaalinen pituus(f), jota kutsumme polun f pituudeksi.

Olkoon $d : X \times X \to \mathbb{R}$ joka määritellään

$$d(x,y) = \inf\{\text{pituus}(f) : f \in \Gamma[x,y]\}. \tag{7.11}$$

Tämän funktion konstruktio herättää kaksi kysymystä. Ensimmäinen on mitä ehtoja asetetaan pituuden määritelmälle, jotta d määrittäisi metriikan joukolle X.

Toinen kysymys on, että jos oletetaan että d määrittää metriikan joukolle X, onko joukossa välttämättä polkuja, jota pitkin voidaan mitata etäisyyttä. Eli jos x ja y ovat pistepari joukossa X, onko välttämättä olemassa polku $f \in \Gamma[x,y]$, jolle pituus$(f) = d(x,y)$.

Seuraavaksi määrittelemme avaruuden, jossa pystytään mittaamaan polkujen pituuksia.

7.12. **Määritelmä.** Olkoon X joukko, jossa voidaan mitata polkujen pituuksia, ja jokaiselle pisteparille $x, y \in X$ on olemassa epätyhjä kokoelma $\Gamma[x,y]$ polkuja $f : [a,b] \to X$, jotka toteuttavat $f(a) = x$ ja

$f(b) = y$, ja polkujen pituuksia merkitään pituus(f). Oletetaan lisäksi, että X on metrinen avaruus metriikalla d. Sanomme että (X, d) on *polkumetrinen avaruus*, jos kaikille pistepareille $x, y \in X$ määritellään

$$d(x, y) = \inf\{\text{pituus}(f) : f \in \Gamma[x, y]\}, \tag{7.13}$$

ja jokaiselle pisteparille $x, y \in X$ on olemassa polku $f \in \Gamma[x, y]$, joka antaa infimumin. Tälle polulle siis pätee

$$d(x, y) = \text{pituus}(f). \tag{7.14}$$

Huomaamme että polkumetrisen avaruuden määritelmä on vahvempi kuin tavallisen metrisen avaruuden, koska se vaatii etäisyyden antavan polun olemassaoloa.

8. Hyperbolinen etäisyys

Olemme nyt valmiita todistamaan, että $\mathbb{H}$ on polkumetrinen avaruus. Jokaiselle pisteparille $x, y \in \mathbb{H}$, olkoon $\Gamma[x, y]$ kaikkien paloittain differentioituvien polkujen $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ joukko, joille $f(a) = x$ ja $f(b) = y$.

Koska pystymme kirjoittamaan sen hyperbolisen suoran osan, joka yhdistää pisteparin $x, y \in \mathbb{H}$, paloittain differentioituvalla polulla, näemme että $\Gamma[x, y]$ ei ole tyhjä. Tiedämme myös, että jokaisella polulla $f \in \Gamma[x, y]$ on äärellinen hyperbolinen pituus pituus$_{\mathbb{H}}(f)$.

8.1. **Määritelmä.** Tutkitaan funktiota

$$d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R},$$

joka määritellään

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma[x, y]\}. \tag{8.2}$$

Kutsumme funktiota $d_{\mathbb{H}}(x, y)$ *hyperboliseksi etäisyydeksi* pisteiden x ja y välillä.

Lauseen 6.15 nojalla hyperbolinen pituus säilyy joukon $Möb(\mathbb{H})$ muunnoksissa.

8.3. **Lause.** *Jokaiselle $\gamma \in Möb(\mathbb{H})$ ja jokaiselle pisteparille $x, y \in \mathbb{H}$ pätee*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)). \tag{8.4}$$

Todistus. Aloitamme huomiolla $\{\gamma \circ f : f \in \Gamma[x, y]\} \subset \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$. Tämä nähdään valitsemalla polku $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ joukosta $\Gamma[x, y]$ siten että $f(a) = x$ ja $f(b) = y$. Koska $\gamma \circ f(a) = \gamma(x)$ ja $\gamma \circ f(b) = \gamma(y)$ pätee että $\gamma \circ f \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$.

Koska pituus ei muutu joukon $Möb(\mathbb{H})$ muunnoksissa, pätee

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f),$$

jokaiselle polulle $f \in \Gamma[x, y]$ ja siis

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)) &= \inf\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) : g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) : f \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma[x, y]\} = d_{\mathbb{H}}(x, y). \end{aligned}$$

Koska γ on kääntyvä funktio ja γ^{-1} on joukon $Möb(\mathbb{H})$ alkio, voimme toistaa aiemman argumentin ja nähdä että

$$\{\gamma^{-1} \circ g : g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \subset \Gamma[x, y],$$

ja siis

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(x, y) &= \inf\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ g) : g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) : g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)). \end{aligned}$$

Erityisesti tästä seuraa että $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$. □

8.5. **Lause.** *Pari* $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ *on polkumetrinen avaruus. Polku* $f \in \Gamma[x, y]$*, joka antaa hyperbolisen etäisyyden, on hyperbolisen suoran osa joka yhdistää pisteet* x *ja* y*.*

Todistus. Jotta voimme todistaa, että $d_{\mathbb{H}}$ määrittää metriikan, täytyy näyttää että $d_{\mathbb{H}}$ toteuttaa kolme metriikan aksioomaa.

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ polku joukossa $\Gamma[x, y]$ ja muistetaan pituuden määritelmä:

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{Im(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{Im(f(t))} |f'(t)| dt.$$

Koska integroituva osa on aina ei-negatiivinen, myös integraali on ei-negatiivinen. Koska pituus$_{\mathbb{H}}(f)$ on ei-negatiivinen jokaiselle polulle $f \in \Gamma[x, y]$, infimum $d_{\mathbb{H}}$ näistä integraaleista on ei-negatiivinen.

Tämä näyttää, että $d_{\mathbb{H}}$ toteuttaa ehdon $d(x, y) \geq 0$, joka on ensimmäinen osa ensimmäistä metriikan aksioomaa. Käsittelemme ensimmäisen aksiooman toisen osan myöhemmin.

Seuraavaksi näytämme, että $d_{\mathbb{H}}$ toteuttaa toisen aksiooman. Tarkoitus on verrata polkujen $\Gamma[x, y]$ ja $\Gamma[y, x]$ pituuksia. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ polku joukossa $\Gamma[x, y]$ ja tutkitaan funktion f yhdistettä funktion $h : [b, a] \to [a, b]$ kanssa, jolle pätee $h(t) = a + b - t$. Huomataan, että $h'(t) = -1$.

On selvää, että $f \circ h$ sisältyy joukkoon $\Gamma[y,x]$, sillä $(f \circ h)(a) = f(b) = y$ ja $(f \circ h)(b) = f(a) = x$. Lisäksi suoralla laskulla saamme

$$\begin{aligned} \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f \circ h) &= \int_{f \circ h} \frac{1}{Im(z)} |dz| \\ &= \int_a^b \frac{1}{Im((f \circ h)(t))} |(f \circ h)'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{Im((f(h(t)))} |(f(h(t))||h'(t)| dt \\ &= -\int_a^b \frac{1}{Im(f(s))} |f'(s)| ds \\ &= \int_b^a \frac{1}{Im(f(s))} |f'(s)| ds = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f). \end{aligned}$$

Siis jokainen polku joukossa $\Gamma[x,y]$ antaa polun joukossa $\Gamma[y,x]$, jolla on sama pituus, kun käytetään sopivaa funktiota h. Vastaavalla päättelyllä jokainen polku joukossa $\Gamma[y,x]$ antaa samanpituisen polun joukossa $\Gamma[x,y]$. Erityisesti nähdään, että kaksi hyperbolisten pituuksien joukkoa

$$\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma[x,y]\} \quad \text{ja} \quad \{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) : g \in \Gamma[y,x]\}$$

ovat samat. Tällöin niillä on sama infimum, eli $d_{\mathbb{H}}(x,y) = d_{\mathbb{H}}(y,x)$. Tämä näyttää, että $d_{\mathbb{H}}$ toteuttaa toisen aksiooman.

Näytetään seuraavaksi, että $d_{\mathbb{H}}$ toteuttaa kolmannen aksiooman, eli kolmioepäyhtälön. Olkoot $x,y,z \in \mathbb{H}$. Yksinkertaisinta olisi valita polku $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ joukosta $\Gamma[x,y]$ pituudella $\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) = d_{\mathbb{H}}(x,y)$ ja polku $g : [b,c] \to \mathbb{H}$ joukosta $\Gamma[y,z]$ pituudella $\text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) = d_{\mathbb{H}}(y,z)$. Yhdiste $f \circ g = h : [a,c] \to \mathbb{H}$ sisältyisi tällöin joukkoon $\Gamma[x,z]$. Tällöin saisimme halutun epäyhtälön

$$d_{\mathbb{H}}(x,z) \le \text{pituus}_{\mathbb{H}}(h) = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) + \text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) = d_{\mathbb{H}}(x,y) + d_{\mathbb{H}}(y,z).$$

Huomaamme, että paloittain differentioituvien polkujen yhdiste on paloittain differentioituva, mutta differentioituvien polkujen yhdiste ei ole välttämättä differentioituva. Tässä on yksi syy tutkia paloittain differentioituvia polkuja.

Valitettavasti emme tiedä vielä onko aina olemassa polku, joka antaa hyperbolisen etäisyyden pisteparin välillä. Tutkimme kysymystä myöhemmin. Joudumme siis todistamaan kolmannen aksiooman nojautumalla vastaoletukseen.

Oletetaan, että kolmioepäyhtälö ei päde funktiolle $d_{\mathbb{H}}$. Tällöin on olemassa erilliset pisteet $x,y,z \in \mathbb{H}$ siten että

$$d_{\mathbb{H}}(x,z) > d_{\mathbb{H}}(x,y) + d_{\mathbb{H}}(y,z)$$

Olkoon

$$\varepsilon = d_{\mathbb{H}}(x,z) - (d_{\mathbb{H}}(x,y) + d_{\mathbb{H}}(y,z)).$$

Koska $d_{\mathbb{H}}(x,y) = \inf\{\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma[x,y]\}$, on olemassa polku $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ joukossa $\Gamma[x,y]$, jolle pätee

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) - d_{\mathbb{H}}(x,y) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Vastaavasti on olemassa polku $g : [b,c] \to \mathbb{H}$ joukossa $\Gamma[y,z]$ jolle pätee

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) - d_{\mathbb{H}}(y,z) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Olkoon nyt $h : [a,c] \to \mathbb{H}$, $h = f \circ g$. Koska kahden paloittain differentioituvan polun yhdiste on paloittain differentioituva, pätee että $h \in \Gamma[x,z]$. Laskemalla huomaamme että

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(h) = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f) + \text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) < d_{\mathbb{H}}(x,y) + d_{\mathbb{H}}(y,z) + \varepsilon.$$

Koska $d_{\mathbb{H}}(x,z) \le \text{pituus}_{\mathbb{H}}(h)$ funktion $d_{\mathbb{H}}$ määritelmän nojalla, pätee

$$d_{\mathbb{H}}(x,z) < d_{\mathbb{H}}(x,y) + d_{\mathbb{H}}(y,z) + \varepsilon,$$

mistä saadaan ristiriita luvun ε konstruktion kanssa. Tämä todistaa kolmannen aksiooman.

Vielä on jäljellä näyttää kaksi asiaa, ennen kuin voimme todeta, että $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ on polkumetrinen avaruus. Meidän täytyy näyttää että $d_{\mathbb{H}}$ toteuttaa ensimmäisen aksiooman toisen osan, eli että $d_{\mathbb{H}}(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$. Lisäksi meidän täytyy näyttää, että on olemassa polku, joka antaa hyperbolisen pituuden jokaisella pisteparilla $x, y \in \mathbb{H}$.

Lähdemme liikkeelle huomiosta, että jos joukossa $\mathbb{H}$ on olemassa polku, joka antaa hyperbolisen etäisyyden minkä tahansa pisteparin välille, joukossa $\mathbb{H}$, tällöin pätee $d_{\mathbb{H}}(x,y) > 0$ kun $x \neq y$, koska polkujen, jotka eivät ole vakiopolkuja, pituudet ovat positiivisia. Saamme siis ensimmäisen aksiooman toisen osan, kun todistamme että on olemassa polku, joka antaa hyperbolisen pituuden jokaisella pisteparilla $x, y \in \mathbb{H}$.

Olkoot x ja y pari erillisiä pisteitä joukossa $\mathbb{H}$ ja olkoon l hyperbolinen suora, joka kulkee pisteiden x ja y kautta. Aloitamme yksinkertaistamalla tilannetta. Käytämme tietoa, että on olemassa $\gamma \in Möb(\mathbb{H})$ siten että $\gamma(l)$ on positiivinen imaginaariakseli joukossa $\mathbb{H}$.

Merkitään $\gamma(x) = \mu i$ ja $\gamma(y) = \lambda i$. Jos $\lambda < \mu$, niin käytetään kuvausta $K \circ \gamma$ kuvauksen γ sijaan, missä $K(z) = -\frac{1}{z}$, jolloin $\mu < \lambda$.

Koska hyperboliset polkujen pituudet joukossa $\mathbb{H}$, jotka lasketaan käyttämällä hyperbolista kaaren pituuden elementtiä $\frac{1}{Im(z)}|dz|$, säilyvät joukon $Möb(\mathbb{H})$ muunnoksissa, pätee että $d_{\mathbb{H}}(x,y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$ (Lause 8.3). Riittää siis osoittaa, että on olemassa hyperbolisen etäisyyden antava polku pisteiden μi ja λi välillä, kun $\mu < \lambda$.

Aloitamme laskun laskemalla tietyn polun hyperbolisen pituuden. Olkoon polku $f_0 : [\mu, \lambda] \to \mathbb{H}$ joka määritellään $f_0(t) = ti$. Polun f_0 kuva on hyperbolinen jana joka yhdistää pisteet μi ja λi. Koska odotamme että lyhyin hyperbolinen etäisyys kahden pisteen välillä saadaan pitkin hyperbolista suoraa, tämä polku vaikuttaa hyvältä valinnalta olemaan lyhyin polku joukossa $\Gamma[\mu i, \lambda i]$.

Jotta voisimme laskea polun f_0 pituuden, huomaamme että $Im(f_0(t)) = t$ ja $|f_0'(t)| = 1$, ja siis

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0) = \int_\mu^\lambda \frac{1}{t} dt = ln\left[\frac{\lambda}{\mu}\right].$$

Nyt olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ mielivaltainen polku joukossa $\Gamma[\mu i, \gamma i]$. Näytämme, että $\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i)$ näyttämällä, että $\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0) \leq \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f)$. Teemme tämän useassa vaiheessa. Joka vaiheessa muutamme polkua f pienentääksemme sen hyperbolista pituutta, ja näytämme, että siitä ei tule lyhyempi kuin polusta f_0, näiden muutosten jälkeen.

Merkitään $f(t) = x(t) + y(t)i$. Ensimmäinen muutos polulle f on jättää pois sen reaaliosa. Tällöin olkoon $g : [a, b] \to \mathbb{H}$ määritelty

$$g(t) = Im(f(t))i = y(t)i.$$

Koska $g(a) = f(a) = \mu i$ ja $g(b) = f(b) = \lambda i$, näemme että $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$. Käytämme tietoa $(x'(t))^2 \geq 0$ kaikille t ja että $Im(g(t)) = Im(f(t)) = y(t)$ ja saamme että

$$\begin{aligned}
\text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) &= \int_a^b \frac{1}{Im(g(t))}|g'(t)|dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{y(t)}\sqrt{(y'(t))^2}dt \\
&\leq \int_a^b \frac{1}{y(t)}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \\
&\leq \int_a^b \frac{1}{Im(f(t))}|f'(t)|dt = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f).
\end{aligned}$$

Siis jokaiselle polulle $f \in \Gamma[\mu i, i]$, voimme konstruoida lyhyemmän polun $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$, asettamalla $g(t) = Im(f(t))i$. Meidän täytyy vielä näyttää että jos $g : [a, b] \to \mathbb{H}$ on mikä tahansa polku joukossa $\Gamma[\mu i, \lambda i]$ muotoa $g(t) = y(t)i$, niin tällöin

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0) \leq \text{pituus}_{\mathbb{H}}(g).$$

Tämä seuraa suoraan Lauseesta 5.14. Kuva $g([a, b])$ on hyperbolinen jana joka yhdistää pisteet αi ja βi, missä $\alpha \leq \mu < \lambda \leq \beta$. Määritellään $f_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}$ siten että $f_1(t) = it$ ja huomataan että

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0) = ln\left[\frac{\lambda}{\mu}\right] \leq ln\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_1).$$

Seuraavaksi voimme kirjoittaa $g = f_1 \circ (f_1^{-1} \circ g)$, missä $f_1^{-1} \circ g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ on konstruktion nojalla surjektio. Lauseesta 5.14 seuraa että

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_1) \leq \text{pituus}_{\mathbb{H}}(g).$$

Tämä päättää todistuksen, että

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0) \leq \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f),$$

jokaiselle polulle $f \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$. Olemme siis näyttäneet että

$$d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0) = ln\left[\frac{\lambda}{\mu}\right].$$

Huomataan, että koska olemme kirjoittaneet $g(t) = y(t)i$ ja koska $f_1(t) = it$, niin pätee $f_1^{-1} \circ g(t) = y(t)$ ja siis

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(g) = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_1)$$

jos ja vain jos joko $y'(t) \geq 0$ kaikille $t \in [a, b]$ tai $y'(t) \leq 0$ kaikille $t \in [a, b]$. Siis ainoat etäisyyden antamat polut joukossa $\Gamma[\mu i, \lambda i]$ ovat ne jotka ovat parametrisaatioita hyperbolisesta janasta joka yhdistää pisteet μi ja λi.

Joukon $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ muunnokset hyperbolisten suorien joukolle, joukossa $\mathbb{H}$, ja se että hyperboliset pituudet ja etäisyydet säilyvät Möbmuunnoksissa saavat aikaan että jokaiselle erilliselle pisteparille $x, y \in \mathbb{H}$ on olemassa etäisyyden antama polku joukossa $\Gamma[x, y]$, nimittäin parametrisaatio hyperbolisesta janasta, joka yhdistää pisteet x ja y.

Olkoon nyt l hyperbolinen suora, joka kulkee pisteiden x ja y kautta, ja olkoon γ joukon $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ muunnos, joka kuvaa suoran l positiiviseksi imaginaariakseliksi I. Kirjoitetaan $\gamma(x) = \mu i$ ja $\gamma(y) = \lambda i$. Huomataan taas, että voimme valita funktion γ siten että $\mu < \lambda$. Jos $\mu > \lambda$, korvataan γ funktiolla $K \circ \gamma$, missä $K(z) = -\frac{1}{z}$.

Olemme juuri näyttäneet että polku $f_0 : [\mu, \lambda] \to \mathbb{H}$, joka määritellään $f_0(t) = ti$ on etäisyyden antama polku joukossa $\Gamma[\mu i, \lambda i]$. Koska $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ säilyttää hyperboliset polkujen pituudet, pätee että

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ f_0) = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0)$$

Koska $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ säilyttää hyperbolisen etäisyyden, pätee että

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1}(\mu i), \gamma^{-1}(\lambda i)) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = \text{pituus}_{\mathbb{H}}(f_0).$$

Yhdistämällä nämä saamme että

$$\text{pituus}_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ f_0) = d_{\mathbb{H}}(x, y),$$

ja siis $\gamma^{-1} \circ f_0$ on etäisyyden antama polku joukossa $\Gamma[x, y]$.

Kuten aiemmin mainittiin tämä päättää myös metriikan ensimmäisen aksiooman toisen osan todistuksen. Siis $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ on polkumetrinen avaruus. □

Viitteet

[1] James W. Anderson: *Hyperbolic Geometry*, 2nd printing 2001, Springer-Verlag London Limited, Great Britain

[2] Jussi Väisälä: *Topologia I*, 4 painos 2007, Limes, Helsinki

[3] Marvin Jay Greenberg: *Euclidean and Non-euclidean Geometries, Development and history*, Fourth Edition 2008, W. H. Freeman and Company, USA